ÉCOLE POLYTECHNIQUE FILIÈRE MP

CONCOURS D'ADMISSION 2008

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Équations différentielles de Sturm-Liouville

Ce problème est consacré à l'étude d'une équation différentielle avec paramètre. On désigne par $C^\infty([0,1])$ l'espace des fonctions réelles de classe C^∞ sur $[0,1]$.

Première partie

Dans cette première partie, étant donné deux fonctions p et q de $C^\infty([0,1])$, on désigne par $A_{p,q}$ l'endomorphisme de $C^\infty([0,1])$ défini par

$$A_{p,q}(y) = y'' + py' + qy$$

et par $(D_{p,q})$ l'équation différentielle sur $[0,1]$: $A_{p,q}(y) = 0$.

1. Soit y une solution non identiquement nulle de $(D_{p,q})$.

1.a) Montrer que les fonctions y et y' ne s'annulent pas simultanément.

1.b) Montrer que les zéros de y sont en nombre fini.

2. Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(D_{p,q})$; on suppose que y_1 admet au moins deux zéros et on note a et b deux zéros consécutifs.

2.a) Montrer que y_2 admet au moins un zéro dans l'intervalle ouvert $]a,b[$. [On pourra procéder par l'absurde et considérer le wronskien W de y_1 et y_2.]

2.b) La fonction y_2 peut-elle avoir plusieurs zéros dans $]a,b[$?

Étant donné deux fonctions u et v de $C^\infty([0,1])$, u ne s'annulant en aucun point, on désigne par $B_{u,v}$ l'endomorphisme de $C^\infty([0,1])$ défini par

$$B_{u,v}(y) = (uy')' + vy$$

et par $(E_{u,v})$ l'équation différentielle sur $[0,1]$: $B_{u,v}(y) = 0$.

3.a) Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(D_{p,q})$ et soit W leur wronskien. Vérifier la relation

$$y_1 B_{u,v}(y_2) - y_2 B_{u,v}(y_1) = (u' - up)W \ .$$

3.b) Montrer que, pour tout couple (p,q), il existe des couples (u,v) tels que $\text{Ker } A_{p,q} = \text{Ker } B_{u,v}$ et déterminer tous ces couples (u,v).

4. On se donne trois fonctions u, v_1, v_2 de $C^\infty([0,1])$ et on suppose

$$u(x) > 0 \quad , \quad v_2(x) < v_1(x) \quad \text{pour tout } x \in [0,1] \ .$$

Pour $i = 1, 2$, on note y_i une solution non identiquement nulle de l'équation (E_{u,v_i}) ; on suppose que y_2 admet au moins deux zéros et on note a et b deux zéros consécutifs.

4.a) Vérifier la relation

$$[uy_1y_2']_a^b = \int_a^b \big(v_1(x) - v_2(x)\big) y_1(x) y_2(x) \, dx \ .$$

[On pourra considérer $\displaystyle\int_a^b \big(y_1 B_{u,v_2}(y_2) - y_2 B_{u,v_1}(y_1)\big) dx$.]

4.b) Montrer que y_1 admet au moins un zéro dans l'intervalle $]a, b[$. [On pourra procéder par l'absurde.]

Dans toute la suite du problème on note r une fonction de $C^\infty([0,1])$; pour tout nombre réel λ on considère l'équation différentielle sur $[0,1]$:

$$(D_\lambda) \qquad\qquad y'' + (\lambda - r)y = 0 \ .$$

On note y_λ l'unique solution de (D_λ) satisfaisant $y_\lambda(0) = 0$, $y_\lambda'(0) = 1$, et E_λ l'espace vectoriel (éventuellement réduit à zéro) des solutions de (D_λ) satisfaisant $y(0) = y(1) = 0$; si cet espace n'est pas réduit à zéro, on dit que λ est *valeur propre*.

Deuxième partie

5.a) Quelles sont les valeurs possibles de $\dim E_\lambda$?

5.b) Démontrer l'équivalence des conditions $E_\lambda \neq \{0\}$ et $y_\lambda(1) = 0$.

6. Démontrer les assertions suivantes :

6.a) Toute valeur propre est supérieure ou égale à $\inf_{x\in[0,1]} r(x)$.

6.b) Si $y_1 \in E_{\lambda_1}$, $y_2 \in E_{\lambda_2}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $\displaystyle\int_0^1 y_1(x) y_2(x) \, dx = 0$.

Troisième partie

Dans les troisième et quatrième parties, on désigne par $N(\lambda)$ le nombre des zéros de la fonction y_λ dans $[0,1]$ et on se propose d'étudier $N(\lambda)$ en lien avec les valeurs de $y_\lambda(1)$, ainsi que la répartition des valeurs propres.

7. Dans cette question on examine le cas où $r = 0$ et $\lambda > 0$. On désigne par $E(a)$ la partie entière d'un nombre réel a.

7.a) Calculer $y_\lambda(x)$ pour $x \in [0,1]$.

7.b) Calculer $N(\lambda)$.

7.c) Préciser le comportement de $N(\lambda)$ au voisinage d'un point λ_0.

On ne suppose plus $r = 0$ ni $\lambda > 0$. On admettra que la fonction de deux variables $(\lambda, x) \mapsto y_\lambda(x)$ est de classe C^∞.

8. Dans cette question, on se propose de démontrer que, si $y_{\lambda_0}(1)$ est non nul, $N(\lambda)$ est constant dans un voisinage de λ_0.

On désigne par $c_1, \ldots, c_n$, $n \geqslant 1$, les zéros de y_{λ_0} dans $[0,1]$ avec

$$0 = c_1 < c_2 < \ldots < c_n < 1\,.$$

8.a) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(\xi_j)_{0 \leqslant j \leqslant 2n}$ de nombres réels, possédant les propriétés suivantes :

(i) $\xi_0 = 0$, $\xi_{2n} = 1$, $0 < \xi_1 < \xi_2$, $\xi_{2j-2} < c_j < \xi_{2j-1}$ pour $j = 2, \ldots, n$;

(ii) $(-1)^{j+1} y_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j-1}, \xi_{2j}]$, $j = 1, \ldots, n$;

(iii) $(-1)^j y'_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$, $j = 0, \ldots, n-1$.

8.b) Dans cette question, on considère une fonction F de classe C^∞ définie sur un ouvert contenant un rectangle compact $I \times J$ de $\mathbf{R}^2$. Démontrer l'assertion suivante : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que les conditions $s_1, s_2 \in I$ et $|s_1 - s_2| < \delta$ impliquent

$$|F(s_1,t) - F(s_2,t)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } t \in J\,.$$

8.c) Montrer que, pour tout λ suffisamment voisin de λ_0, y_λ a exactement un zéro dans chacun des intervalles $[\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$, mais n'en a aucun dans les intervalles $[\xi_{2j-1}, \xi_{2j}]$. Conclure.

9. Montrer que, pour tout $\lambda \geqslant \rho = \sup_{x \in [0,1]} r(x)$, on a

$$N(\lambda) \geqslant E\Big((\lambda - \rho)^{1/2} \pi^{-1}\Big)\,.$$

[On pourra utiliser la question 4 et la question 7 en y remplaçant λ par un réel quelconque $\mu < \lambda - \rho$.]

10.a) Montrer que, si $y_\lambda(1)$ est non nul pour tout λ appartenant à un intervalle I, $N(\lambda)$ est constant dans I.

10.b) L'ensemble des valeurs propres est-il vide ou non vide ? fini ou infini ?

Quatrième partie

Dans cette quatrième partie, on étudie le comportement de $N(\lambda)$ au voisinage d'un point λ_0 tel que $y_{\lambda_0}(1) = 0$. On écrira $y(\lambda, x)$ au lieu de $y_\lambda(x)$, et on rappelle que cette fonction de deux variables est de classe C^∞ ; l'équation (D_λ) s'écrit donc :

(i) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (\lambda - r)y = 0\,.$$

11. Démontrer que la relation (i) entraine les relations suivantes :

(ii) $$\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial \lambda} + (\lambda - r)\frac{\partial y}{\partial \lambda} + y = 0$$

(iii) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial \lambda} y - y^2 = 0$$

(iv) $$\frac{\partial y}{\partial \lambda}(\lambda_0, 1)\frac{\partial y}{\partial x}(\lambda_0, 1) = \int_0^1 y(\lambda_0, x)^2\, dx > 0\,.$$

12. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ ayant les propriétés suivantes :

(i) si $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0[$, on a $N(\lambda) = N(\lambda_0) - 1$;
(ii) si $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon]$, on a $N(\lambda) = N(\lambda_0)$.

13. Montrer qu'on peut écrire les valeurs propres comme une suite croissante infinie $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, et exprimer $N(\lambda_n)$ en fonction de n.

* *
*

X, première composition MP 2008

Corrigé rédigé par Denis Choimet

L'auteur remercie par avance les lecteurs qui voudront bien lui signaler les erreurs contenues dans ce corrigé.

Première partie

1.a) Fixons $a \in [0,1]$. La fonction identiquement nulle est solution de $(D_{p,q})$, et elle est nulle en a ainsi que sa dérivée. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, une solution non identiquement nulle y de $(D_{p,q})$ ne peut vérifier les mêmes conditions initiales. Donc $\boxed{(y(a), y'(a)) \neq (0,0) \text{ pour tout } a \in [0,1]}$.

1.b) Soit a un zéro de y. D'après 1.a), $y'(a) \neq 0$, donc $y(x) \underset{x \to a}{\sim} y'(a)(x-a)$. Cela prouve que, dans un voisinage de a, y ne s'annule qu'en a, autrement dit que les zéros de y sont isolés.
Supposons un instant l'ensemble des zéros de y infini. On peut alors former une suite injective $(z_n)_{n\geq 0}$ de zéros de y. Comme $[0,1]$ est compact, quitte à extraire, on peut supposer que cette suite converge vers $a \in [0,1]$. y étant continue en a, a est un zéro de y, qui n'est pas isolé : contradiction.

$$\boxed{\text{L'ensemble des zéros de } y \text{ est fini}}.$$

Remarque : l'argument peut se résumer ainsi : un espace métrique compact dont la topologie est discrète est fini.

2.a) On va éviter le raisonnement par l'absurde préconisé par le texte. Considérons le wronskien $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ de y_1 et y_2. Comme y_1 et y_2 sont des solutions indépendantes de $(D_{p,q})$, W ne s'annule pas sur $[0,1]$, et est donc de signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Pour la même raison, y_1 est de signe constant sur $]a,b[$; quitte à changer y_1 en $-y_1$, on peut supposer ce signe strictement positif, ce qui oblige[1] $y_1'(a) > 0$ et $y_1'(b) < 0$. D'autre part,

$$W(a) = -y_1'(a)y_2(a) \text{ et } W(b) = -y_1'(b)y_2(b).$$

On déduit de tout cela que $y_2(a)y_2(b) < 0$.

$$\boxed{y_2 \text{ admet donc au moins un zéro dans }]a,b[}.$$

2.b) Si jamais y_2 admettait deux zéros c et d, qu'on peut supposer consécutifs, dans $]a,b[$, d'après 2.a) y_1 admettrait un zéro dans $]c,d[\subset]a,b[$, ce qui est absurde. $\boxed{y_2 \text{ admet donc un unique zéro dans }]a,b[}$.

[1] Ces dérivées ne peuvent être nulles d'après 1.a)

3.a) On calcule, en tenant compte du fait que y_1 et y_2 sont solutions de $(D_{p,q})$:

$$\begin{aligned}
y_1 B_{u,v}(y_2) - y_2 B_{u,v}(y_1) &= y_1(uy_2'' + u'y_2' + vy_2) - y_2(uy_1'' + u'y_1' + vy_1) \\
&= y_1((u' - pu)y_2' + (v - qu)y_2) - y_2((u' - pu)y_1' + (v - qu)y_1) \\
&= \boxed{(u' - pu)W}.
\end{aligned}$$

3.b) Fixons $(p, q) \in C^\infty([0,1])^2$.

Supposons que $(u, v) \in C^\infty([0,1])^2$ vérifie $\ker B_{u,v} = \ker A_{p,q}$. Alors, avec les notations de 3.a), y_1 et y_2 sont éléments de $\ker B_{u,v}$, d'où, puisque W ne s'annule pas, $\boxed{u' - pu = 0}$. D'autre part, comme $A_{p,q}(y_1) = B_{u,v}(y_1) = 0$ et u ne s'annule pas, on a

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = y_1'' + \frac{u'}{u}y_1' + \frac{v}{u}y_1 = 0,$$

d'où $\left(q - \frac{v}{u}\right) y_1 = 0$. Par conséquent, d'après 1.b), la fonction $q - \frac{v}{u}$ est nulle en dehors d'un nombre fini de points de $[0,1]$, donc sur $[0,1]$ par continuité. Finalement, $\boxed{v = qu}$.

Réciproquement, si $u' - pu = 0$ et $v = qu$, alors, pour tout $y \in C^\infty([0,1])$, on a

$$B_{u,v}(y) = uy'' + u'y' + vy = u(y'' + py' + qy),$$

donc $\ker A_{p,q} = \ker B_{u,v}$ puisque u ne s'annule pas.

En définitive, les couples (u, v) pour lesquels $\ker A_{p,q} = \ker B_{u,v}$ sont les couples

$$\boxed{\left(x \mapsto \lambda \exp\left(\int_0^x p(t)dt\right), x \mapsto \lambda q(x) \exp\left(\int_0^x p(t)dt\right)\right),\ \lambda \text{ décrivant } \mathbb{R}}.$$

4.a) Suivons l'indication du texte... D'une part, bien sûr,

$$\int_a^b (y_1 B_{u,v_2}(y_2) - y_2 B_{u,v_1}(y_1))dx = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (y_1 B_{u,v}(y_2) - y_2 B_{u,v}(y_1))dx &= \int_a^b (y_1(uy_2'' + u'y_2' + v_2y_2) - y_2(uy_1'' + u'y_1' + v_1y_1))\,dx \\
&= \int_a^b (v_2 - v_1)y_1y_2\,dx + \int_a^b (u(y_1y_2'' - y_2y_1'') + u'(y_1y_2' - y_2y_1'))\,dx \\
&= \int_a^b (v_2 - v_1)y_1y_2\,dx + \int_a^b (u(y_1y_2' - y_2y_1'))'\,dx \\
&= \int_a^b (v_2 - v_1)y_1y_2\,dx + [u(y_1y_2' - y_2y_1')]_a^b \\
&= \int_a^b (v_2 - v_1)y_1y_2\,dx + [uy_1y_2']_a^b
\end{aligned}$$

puisque $y_2(a) = y_2(b) = 0$. Finalement,

$$\boxed{[uy_1y_2']_a^b = \int_a^b (v_1(x) - v_2(x))y_1(x)y_2(x)dx}.$$

4.b) Supposons un instant que y_1 ne s'annule pas dans $]a, b[$. Quitte à changer y_1 et y_2 en leurs opposés (ce qui est sans importance pour étudier leurs zéros), on peut supposer ces fonctions strictement positives dans $]a, b[$. Cela impose notamment $y_2'(a) > 0$, $y_2'(b) < 0$. Alors, la fonction $(v_1 - v_2)y_1y_2$ étant continue, positive et non identiquement nulle, on a

$$\int_a^b (v_1(x) - v_2(x))y_1(x)y_2(x)dx > 0$$

d'où, d'après 4.a),

$$\underbrace{u(b)y_2'(b)}_{<0}\underbrace{y_1(b)}_{\geq 0} - \underbrace{u(a)y_2'(a)}_{>0}\underbrace{y_1(a)}_{\geq 0} > 0,$$

ce qui est absurde. $\boxed{y_1 \text{ admet donc au moins un zéro dans }]a, b[}$.

Deuxième partie

5.a) L'ensemble des solutions de (D_λ) est un espace vectoriel de dimension 2 contenant strictement E_λ (puisque (D_λ) admet des solutions non nulles en 0), donc $\boxed{\dim E_\lambda \in \{0, 1\}}$.

5.b) Si $y_\lambda(1) = 0$, y_λ est un élément non nul de E_λ. Réciproquement, supposons que $E_\lambda \neq \{0\}$. D'après 5.a), E_λ est alors une droite vectorielle. D'autre part, si nous notons S_λ l'espace vectoriel de dimension 2 des solutions de (D_λ), l'application

$$\delta_0 : S_\lambda \to \mathbb{R}, y \mapsto y(0)$$

est une forme linéaire non nulle. Son noyau est donc une droite vectorielle contenant E_λ. Pour des raisons de dimension, $E_\lambda = \ker \delta_0$. Or, $y_\lambda \in \ker \delta_0$, donc $y_\lambda \in E_\lambda$, autrement dit $y_\lambda(1) = 0$. On a donc montré que

$$\boxed{E_\lambda \neq \{0\} \Leftrightarrow y_\lambda(1) = 0}.$$

6.a) Supposons que λ soit une valeur propre. D'après 5.b), $y_\lambda \in E_\lambda$, et comme $y_\lambda'' = (r - \lambda)y_\lambda$, on a aussi

$$y_\lambda y_\lambda'' = (r - \lambda)y_\lambda^2,$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (r(x) - \lambda)y_\lambda(x)^2 dx &= \int_0^1 y_\lambda(x)y_\lambda''(x)dx \\
&= [y_\lambda(x)y_\lambda'(x)]_0^1 - \int_0^1 y_\lambda'(x)^2 dx \\
&= -\int_0^1 y_\lambda'(x)^2 dx \text{ puisque } y_\lambda(0) = y_\lambda(1) = 0 \\
&< 0 \text{ puisque } y_\lambda'^2 \text{ est continue, positive et non identiquement nulle.}
\end{aligned}$$

La fonction $r-\lambda$ ne peut donc être positive. Par suite, il existe $x \in [0,1]$ tel que $r(x) < \lambda$; autrement dit, $\boxed{\inf_{x\in[0,1]} r(x) < \lambda}$, ce qui est un peu plus précis que ce que propose le texte.

6.b) Soit $y_1 \in E_{\lambda_1}$ et $y_2 \in E_{\lambda_2}$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Parachutons[2] l'opérateur

$$\Phi : E_\lambda \to C^\infty([0,1]), y \mapsto y'' - ry.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Phi(y_1)(x)y_2(x)dx &= \int_0^1 y_1''(x)y_2(x)dx - \int_0^1 r(x)y_1(x)y_2(x) \\
&= \underbrace{[y_1'(x)y_2(x)]_0^1}_{=0 \text{ puisque } y_2\in E_\lambda} - \int_0^1 y_1'(x)y_2'(x)dx - \int_0^1 r(x)y_1(x)y_2(x) \\
&= \underbrace{-[y_1(x)y_2'(x)]_0^1}_{=0 \text{ puisque } y_1\in E_\lambda} + \int_0^1 y_1(x)y_2''(x)dx - \int_0^1 r(x)y_1(x)y_2(x) \\
&= \int_0^1 y_1(x)\Phi(y_2)(x)dx.
\end{aligned}$$

On est en présence d'une *sorte* d'opérateur autoadjoint - mais Φ n'est pas un endomorphisme ; on ne sera donc pas surpris que les « sous-espaces propres » de Φ soient deux à deux orthogonaux. Tenant compte du fait que $\Phi(y_1) = -\lambda_1 y_1$ et $\Phi(y_2) = -\lambda_2 y_2$, cela donne

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\int_0^1 y_1(x)y_2(x)dx = 0$$

d'où, puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$\boxed{\int_0^1 y_1(x)y_2(x)dx = 0}.$$

Troisième partie

7.a) Immédiatement : $\boxed{y_\lambda(x) = \dfrac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} \text{ pour tout } x \in [0,1]}$.

7.b) Les zéros de y_λ sont donc les $\dfrac{k\pi}{\sqrt{\lambda}}$, $0 \leq k \leq \left[\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\right]$. Par suite, $\boxed{N(\lambda) = 1 + \left[\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\right]}$.

7.c) La fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{N}, \lambda \mapsto N(\lambda)$ est donc *constante au voisinage de tout* $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*$ *qui n'est pas de la forme* $k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}^*$. En revanche, cette fonction est discontinue (à gauche) en les $k^2\pi^2$.

Remarque : les $k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, sont précisément les valeurs propres strictement positives de (D_λ).

[2] Pas tant que cela, en fait : on s'arrange pour que y_1 et y_2 soient des "vecteurs propres" de Φ.

8.a) La fonction y_λ ne s'annule pas sur $]c_1, c_2[$. Comme $y_\lambda(0) = 0$ et $y'_\lambda(0) > 0$, *y_λ est strictement positive sur $]c_1, c_2[$*. De plus, comme $y'_\lambda(0) > 0$ et y'_λ est une fonction continue, *y'_λ reste strictement positive dans un voisinage $[\xi_0, \xi_1]$ de c_1, avec $\xi_0 = c_1$ et $\xi_1 < c_2$*.

D'autre part, si jamais $y'_\lambda(c_2)$ (qui est certainement non nul d'après Cauchy-Lipschitz) était strictement positif, la fonction y_λ serait strictement négative dans un voisinage à gauche de c_2, ce qui est absurde, d'où $y'_\lambda(c_2) < 0$. De même que précédemment, *y'_λ reste donc strictement négative dans un voisinage $[\xi_2, \xi_3]$ de c_2, avec $\xi_1 < \xi_2 < c_2 < \xi_3 < c_3$*.

Bien entendu, *y_λ est strictement positive sur $[\xi_1, \xi_2]$*.

Notons enfin que comme $y_\lambda(c_2) = 0$, $y'_\lambda(c_2) < 0$ et y_λ ne s'annule pas sur $]c_2, c_3[$, *y_λ est strictement négative sur $]c_2, c_3[$*.

La construction des ξ_j se poursuit sans encombre, grâce à une récurrence dont la rédaction ne ferait qu'obscurcir les choses. L'indispensable dessin est laissé aux soins du lecteur.

8.b) Comme $I \times J$ est compact, F est uniformément continue sur $I \times J$. Le résultat en découle immédiatement.

8.c) **Avertissement : tous les intervalles compacts envisagés dans cette question sont d'intérieur non vide.**

Fixons tout d'abord $j \in [\![1, n-1]\!]$. D'une part, comme $y_{\lambda_0}(\xi_{2j}) y_{\lambda_0}(\xi_{2j+1}) < 0$ et les fonctions $\lambda \mapsto y_\lambda(\xi_k)$ sont continues (fait admis par l'énoncé), *on aura également $y_\lambda(\xi_{2j}) y_\lambda(\xi_{2j+1}) < 0$ pour λ appartenant à un intervalle compact I_j centré en λ_0*.

D'autre part, la fonction $(-1)^j y'_{\lambda_0}$ est continue et strictement positive sur le compact $[\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$; il existe donc un réel strictement positif ε tel que $(-1)^j y'_{\lambda_0}(x) \geq 2\varepsilon$ pour tout $x \in [\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$. Par ailleurs, la fonction $(\lambda, x) \mapsto (-1)^j y'_\lambda(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$. La question 8.b) fournit donc un intervalle compact I'_j centré en λ_0 tel que, pour $(\lambda, x) \in I'_j \times [\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$, l'on ait

$$|(-1)^j y'_\lambda(x) - (-1)^j y'_{\lambda_0}(x)| \leq \varepsilon.$$

Dès lors, si $(\lambda, x) \in I'_j \times [\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$, on a

$$(-1)^j y'_\lambda(x) \geq (-1)^j y'_{\lambda_0}(x) - |(-1)^j y'_\lambda(x) - (-1)^j y'_{\lambda_0}(x)| \geq \varepsilon.$$

En particuier, *si $\lambda \in I'_j$, la fonction $(-1)^j y_\lambda$ est strictement croissante sur $[\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$*.

Les deux phrases en italique qui précèdent prouvent que si $\lambda \in I_j \cap I'_j$, y_λ admet exactement un zéro dans $[\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$.

Le même argument fonctionne si $j = 0$, et fournit un intervalle compact I_0 centré en λ_0 tel que, si $\lambda \in I_0$, la fonction y_λ est strictement croissante sur

$[\xi_0, \xi_1]$. Comme $y_\lambda(0) = 0$, cela prouve que *si* $\lambda \in I_0$, $\xi_0 = 0$ *est l'unique zéro de* y_λ *dans* $[\xi_0, \xi_1]$.

En ce qui concerne les segments $[\xi_{2j-1}, \xi_{2j}]$, l'argument est similaire : ayant fixé $j \in [\![1, n]\!]$, il existe un réel strictement positif ε tel que $(-1)^{j+1} y_{\lambda_0} \geq 2\varepsilon$ sur $[\xi_{2j-1}, \xi_{2j}]$, ainsi qu'un intervalle compact I''_j centré en λ_0 tel que, pour $(\lambda, x) \in I''_j \times [\xi_{2j-1}, \xi_{2j}]$, l'on ait

$$|(-1)^{j+1} y_\lambda(x) - (-1)^{j+1} y_{\lambda_0}(x)| \leq \varepsilon.$$

Alors, si $(\lambda, x) \in I''_j \times [\xi_{2j-1}, \xi_{2j}]$, on aura $(-1)^{j+1} y_\lambda(x) \geq \varepsilon$. En particulier, *si* $\lambda \in I''_j$*, la fonction* $(-1)^{j+1} y_\lambda$ *n'admet aucun zéro dans* $[\xi_{2j-1}, \xi_{2j}]$.

Pour conclure, il reste à noter I l'intersection (*finie*) des I_j, I'_j et I''_j : c'est un intervalle compact centré en λ_0 ; ce qui précède montre que pour tout $\lambda \in I$, y_λ admet exactement un zéro dans chaque $[\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$ et aucun dans chaque $[\xi_{2j-1}, \xi_{2j}]$.

Le décompte des zéros est alors facile : $\boxed{\text{si } \lambda \in I,\ N(\lambda) = n = N(\lambda_0)}$.

9. Dans cette question, on fixe un réel λ tel que $\lambda \geq \rho = \sup_{x \in [0,1]} r(x)$. On peut bien sûr supposer que $\lambda > \rho$, sinon le résultat à montrer est évident, ce qui permet de fixer un réel μ tel que $0 < \mu < \lambda - \rho$, et l'indication de l'énoncé nous conduit à envisager les deux équations différentielles

$$y'' + (\lambda - r)y = 0 \qquad (D_\lambda)$$

et

$$y'' + \mu y = 0 \qquad (D'_\mu)$$

Les hypothèses de la question 4. sont alors vérifiées, avec $u(x) = 1$, $v_1(x) = \lambda - r(x)$ et $v_2(x) = \mu$. Dans ce qui suit, nous noterons N_μ le nombre de zéros dans $[0, 1]$ de la solution y de (D'_μ) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. D'après la question 7.b),

$$N_\mu = 1 + \left[\frac{\sqrt{\mu}}{\pi}\right],$$

et d'après la question 4.b),

$$N(\lambda) \geq N_\mu - 1,$$

puisque si c et d sont deux zéros consécutifs de y, y_λ admet un zéro dans $]c, d[$. En réalité, comme 0 est par définition un zéro de y_λ, nous avons même un peu mieux :

$$N(\lambda) \geq N_\mu = 1 + \left[\frac{\sqrt{\mu}}{\pi}\right],$$

et ce pour tout $\mu < \lambda - \rho$. Reste à faire tendre μ vers $\lambda - \rho$ dans cette inégalité. Or,

$$\left[\frac{\sqrt{\mu}}{\pi}\right] \underset{\mu \nearrow \lambda - \rho}{\longrightarrow} \begin{cases} \left[\dfrac{\sqrt{\lambda - \rho}}{\pi}\right] & \text{si } \dfrac{\sqrt{\lambda - \rho}}{\pi} \notin \mathbb{N}, \\ \left[\dfrac{\sqrt{\lambda - \rho}}{\pi}\right] - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans tous les cas,

$$\boxed{N(\lambda) \geq \left[\frac{\sqrt{\lambda - \rho}}{\pi}\right]}.$$

10.a) Supposons $y_\lambda(1) \neq 0$ pour tout λ appartenant à un intervalle I. Fixons $\lambda_0 \in I$, et posons

$$E = \{\lambda \in I / N(\lambda) = N(\lambda_0)\}.$$

D'après la question 8.c), la fonction N est localement constante sur I. Elle est donc par le fait même continue sur I, de sorte que E est un fermé de I. D'autre part, pour la même raison, E est un ouvert de I, non vide de surcroît. Comme I est connexe par arcs, $E = I$ et $\boxed{N \text{ est constante sur } I}$.

10.b) L'inégalité de la question 9. montre que

$$N(\lambda) \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

La fonction N ne peut donc être constante sur $\mathbb{R}$. D'après 10.a), il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_\lambda(1) = 0$. D'après 5.b), λ est alors valeur propre : l'ensemble des valeurs propres est donc non vide. Si jamais cet ensemble était fini, on aurait alors $y_\lambda(1) \neq 0$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ assez grand, donc (question 10.a) N serait constante sur un voisinage de $+\infty$, ce que la question 9. exclut. Finalement, $\boxed{\text{l'ensemble des valeurs propres est infini}}$ (et non majoré).

Quatrième partie

11. Dérivons (i) par rapport à λ. Cela donne (le théorème de Schwarz justifiant l'échange des dérivations) :

$$\boxed{\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial \lambda} + (\lambda - r)\frac{\partial y}{\partial \lambda} + y = 0}. \qquad \text{(ii)}$$

Ensuite, en utilisant (ii) :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial \lambda} y - y^2 = -(\lambda - r) y \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \left((\lambda - r)\frac{\partial y}{\partial \lambda} + y\right) y - y^2$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial \lambda} y - y^2 = 0}. \qquad \text{(iii)}$$

Fixons $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y_{\lambda_0}(1) = 0$. On a alors, grâce à (iii) et deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y(\lambda_0, x)^2 dx &= \int_0^1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\lambda_0, x)\frac{\partial y}{\partial \lambda}(\lambda_0, x) dx - \int_0^1 \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial \lambda}(\lambda_0, x) y(\lambda_0, x) dx \\
&= \left[\frac{\partial y}{\partial x}(\lambda_0, x)\frac{\partial y}{\partial \lambda}(\lambda_0, x)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{\partial y}{\partial x}(\lambda_0, x)\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \lambda}(\lambda_0, x) dx \\
&\quad - \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \lambda}(\lambda_0, x) y(\lambda_0, x)\right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \lambda}(\lambda_0, x)\frac{\partial y}{\partial x}(\lambda_0, x) dx \\
&= \frac{\partial y}{\partial x}(\lambda_0, 1)\frac{\partial y}{\partial \lambda}(\lambda_0, 1) - \frac{\partial y}{\partial x}(\lambda_0, 0)\frac{\partial y}{\partial \lambda}(\lambda_0, 0)
\end{aligned}$$

puisque $y(\lambda_0,0) = y(\lambda_0,1) = 0$. D'autre part, la fonction $\lambda \mapsto y(\lambda,0) = y_\lambda(0)$ est indentiquement nulle. Par suite, $\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}(\lambda_0,0) = 0$. En définitive,

$$\boxed{\int_0^1 y(\lambda_0,x)^2dx = \frac{\partial y}{\partial x}(\lambda_0,1)\frac{\partial y}{\partial \lambda}(\lambda_0,1)}. \qquad \text{(iv)}$$

Comme la fonction y_{λ_0} est continue sur $[0,1]$ et non identiquement nulle, la dernière intégrale écrite est strictement positive.

12. Pour rédiger cette question de façon compréhensible, il est souhaitable de distinguer deux cas, selon la parité de $N(\lambda_0)$. Supposons dans un premier temps cet entier *impair*. Rappelons que les zéros de y_{λ_0} sont notés

$$1 = c_1 < c_2 < \ldots < c_{N(\lambda_0)-1} < c_{N(\lambda_0)} = 1.$$

et que, en dehors de c_1 et $c_{N(\lambda_0)}$, ils sont tous avec changement de signe. y_{λ_0} est donc strictement négative sur $]c_{N(\lambda_0)-1}, c_{N(\lambda_0)}[$, d'où

$$y'_{\lambda_0}(1) = \frac{\partial y}{\partial x}(\lambda_0,1) > 0.$$

D'après (iv),

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}(\lambda_0,1) > 0.$$

À cause de la continuité de $(\lambda,x) \mapsto y(\lambda,x)$ et de toutes ses dérivées partielles, il existe un intervalle compact centré en λ_0, ainsi que $\xi \in]c_{N(\lambda_0)-1}, c_{N(\lambda_0)}[$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}(\lambda,x) > 0$ pour $(\lambda,x) \in I \times [\xi,1]$,
- y_λ croît strictement sur $[\xi,1]$ pour chaque $\lambda \in I$ (argument détaillé en 8.c),
- $y_\lambda(\xi) < 0$ pour $\lambda \in I$ (car si ξ est quelconque dans $]c_{N(\lambda_0)-1}, c_{N(\lambda_0)}[$, $y_{\lambda_0}(\xi) < 0$).

De plus, quitte à rétrécir I, on peut supposer de plus (cf. 8.c) que si $\lambda \in I$, y_λ admet exactement $N(\lambda_0) - 1$ zéros dans $[0,\xi]$.

Notons que la première condition assure la stricte croissance sur I de la fonction $\lambda \mapsto y(\lambda,x)$ pour chaque $x \in [\xi,1]$. Dès lors, si $\lambda \in I$ est tel que $\lambda < \lambda_0$, alors

$$y_\lambda(1) < y_{\lambda_0}(1) = 0.$$

La fonction y_λ n'admet donc aucun zéro dans $[\xi,1]$, d'où $\boxed{N(\lambda) = N(\lambda_0) - 1}$.

À présent, si $\lambda \in I$ vérifie $\lambda > \lambda_0$, on a

$$\begin{cases} y_\lambda(\xi) < 0, \\ y_\lambda(1) > y_{\lambda_0}(1) = 0. \end{cases}$$

y_λ admet donc un unique zéro dans $[\xi,1]$, ce qui prouve que $\boxed{N(\lambda) = N(\lambda_0)}$.

Si $N(\lambda_0)$ est pair, les choses fonctionnent de façon analogue, sauf que cette fois $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(\lambda_0, 1) < 0$: lorsque λ croît dans un voisinage de λ_0, le graphe de y_λ « descend » au lieu de « monter » comme ci-dessus.

13. À ce stade, on dispose des informations suivantes sur l'ensemble Σ des valeurs propres :

- Σ est *infini, non majoré* (10.b) et *minoré* (6.a),
- les points de Σ sont isolés : si $\lambda_0 \in \Sigma$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon] \setminus \{\lambda_0\}$, $y_\lambda(1) \neq 0$ (et donc $\lambda \notin \Sigma$) : cela résulte de la stricte monotonie au voisinage de λ_0 de la fonction $\lambda \mapsto y(\lambda, 1)$ (cf. question 12). En particulier (cf. 1.b) : *tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ rencontre Σ selon un ensemble fini.*

Cela devrait suffire pour écrire les valeurs propres sous la forme d'une suite strictement croissante

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

et tendant vers $+\infty$. D'après 10.a), la fonction N est constante sur $]-\infty, \lambda_1[$ et sur chaque $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$, et d'après 12, $N(\lambda_{i+1}) = N(\lambda_i) + 1$ pour $i \geq 1$. Il nous reste donc à calculer $N(\lambda_1)$. Bien sûr, $N(\lambda_1) \geq 2$ puisque 0 et 1 sont zéros de y_{λ_1}. Supposons un instant que $N(\lambda_1) > 2$; alors $N(\lambda) > 1$ pour tout $\lambda \in]-\infty, \lambda_1[$ (10.a et 12 à nouveau). Nous allons aboutir à une absurdité en réutilisant l'argument d'entrelacement des zéros de la question 4, ainsi que des solutions *faiblement oscillantes* de (D_λ) (i.e. avec un λ très négatif). De façon précise, considérons des équations différentielles (D_λ) et

$$y'' - y = 0. \qquad (D'_{-1})$$

La fonction $x \mapsto \sinh x$ est bien sûr solution de (D'_{-1}). Choisissons alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda < \lambda_1$ et $\lambda - r(x) < -1$ pour tout $x \in [0, 1]$. On a déjà indiqué que y_λ possède au moins deux zéros dans $[0, 1]$. Si c et d sont deux zéros consécutifs de y_λ, la fonction sinh admet un zéro dans $]c, d[\subset]0, 1[$, ce qui est évidemment absurde. On a donc montré que $N(\lambda_1) = 2$, et donc que

$$\boxed{N(\lambda_n) = n + 1 \text{ pour tout } n \geq 1}.$$